

## 10. EINE ANWENDUNG DER JORDAN-NORMALFORM IN DER ANALYSIS

In vielen physikalischen Anwendungen ist es notwendig, Systeme von Differentialgleichungen der Form:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= b_{11} \cdot y_1(t) + b_{12} \cdot y_2(t) + \cdots + b_{1n} \cdot y_n(t) + f_1(t) \\ y_2'(t) &= b_{21} \cdot y_1(t) + b_{22} \cdot y_2(t) + \cdots + b_{2n} \cdot y_n(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= b_{n1} \cdot y_1(t) + b_{n2} \cdot y_2(t) + \cdots + b_{nn} \cdot y_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

zu betrachten, wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare reelle Funktionen,  $b_{ij} \in \mathbb{R}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ , und  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen sind. Ist dann  $B = (b_{ij})$  die Matrix mit den Koeffizienten  $b_{ij}$ , so können wir das System auch in der Kurzschreibweise

$$y'(t) = B \cdot y(t) + f(t), \quad y(t) := (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T, \quad f(t) := (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$$

formulieren, wobei dann  $y'(t) := (y_1'(t), \dots, y_n'(t))^T$  die **komponentenweise** Ableitung von  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnet. Definieren wir Konvergenz von Vektoren durch die Konvergenz der Komponenten, so ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in  $t$  genau dann, wenn

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (y(t+h) - y(t))$$

existiert. In der Regel wird zusätzlich zum oben gegebenen System von Differentialgleichungen noch eine Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})^T$$

vorgegeben, wobei  $t_0 \in I$  eine gegebene "Anfangszeit" ist. Gesucht sind also alle (komponentenweise) differenzierbaren Funktionen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $y' = B \cdot y + f(t)$  und  $y(t_0) = y_0$ . Eine Gleichung dieser Form heißt *System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* mit der *Anfangsbedingung*  $y(t_0) = y_0$ . Ist  $f \equiv 0$ , so heißt das System  $y' = By$  *homogenes System linearer DGLn erster Ordnung*.

**Beispiel 10.1.** Ein Zahlen-Beispiel: Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) - y_3(t) + \sin(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t) + y_3(t) - \cos(t) \\ y_3'(t) &= 3y_1(t) + y_2(t) + t \end{aligned}$$

und der Anfangsbedingung  $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 2$ . Ist dann  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

und  $f(t) = (\sin(t), -\cos(t), t)^T$ , so ist das obige System von Differentialgleichungen gegeben durch die Gleichung  $y'(t) = B \cdot y(t) + f(t)$ ,  $y(0) = (1, 0, 2)^T$ , wobei  $y = (y_1, y_2, y_3)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die gesuchte  $\mathbb{R}^3$ -wertige Funktion ist.

**Bemerkung 10.2.** (1) Tatsächlich ist es nützlich, sich nicht auf den Fall reeller Funktionen zu beschränken, sondern auch komplexwertige Funktionen und komplexe Matrizen zuzulassen.

Ist dabei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist  $f$  differenzierbar in  $t \in \mathbb{R}$ , wenn  $f'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  existiert. Ist  $f = g + ih$  und  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $f$  genau dann differenzierbar in  $t$ , wenn  $g$  und  $h$  in  $t$  differenzierbar sind, und dann gilt  $f'(t) = g'(t) + ih'(t)$ . Mit diesem Verständnis für die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen auf  $\mathbb{R}$  können wir jetzt auch Systeme der Form

$$y' = B \cdot y + f, \quad y(t_0) = y_0$$

mit  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  und  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  betrachten. Die gesuchte Lösung ist dann eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Wir werden im folgenden diesen allgemeineren Fall betrachten.

(2) Durch die Substitution  $t \mapsto t + t_0$  können wir uns immer auf den Fall  $t_0 = 0$  beschränken: Dazu setze  $J =: I - t_0 = \{t - t_0 : t \in I\}$  und  $\tilde{f} : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\tilde{f}(t) = f(t + t_0)$ . Ist dann  $\tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $\tilde{y}' = B \cdot \tilde{y} + \tilde{f}$  und  $\tilde{y}(0) = y_0$ , und setzen wir  $y(t) := \tilde{y}(t - t_0)$ , so folgt sofort aus den Ableitungsregeln, dass  $y' = B \cdot y + f$  mit  $y(t_0) = y_0$ .

Im eindimensionalen Fall ist es sehr leicht, eine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'(t) = b \cdot y(t)$ ,  $y(0) = y_0$  anzugeben. Nachrechnen zeigt sofort, dass  $y(t) = e^{tb}y_0$  eine Lösung dieser Gleichung ist. Mit etwas mehr Mühe sieht man dann sogar ein, dass dies die **einzige** Lösung der Gleichung ist. Wir werden gleich sehen, dass eine ähnliche Formel auch für Systeme gilt.

Zunächst benötigen wir ein Verfahren, wie wir Matrizen in Potenzreihen einsetzen können.

**Definition 10.3.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  eine Reihe von Matrizen in  $M(n \times n, \mathbb{K})$  mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ , d.h.,  $A_k \in M(n \times n, \mathbb{K})$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Sei

$$S_n := \sum_{k=0}^n A_k \in M(n \times n, \mathbb{K})$$

die  $n$ -te Partialsumme der Reihe. Wir sagen dann, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  gegen eine Matrix  $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$  konvergiert, wenn  $(S_n)_{i,j} \rightarrow S_{i,j}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt, wobei  $(S_n)_{i,j}$  (bzw.  $S_{i,j}$ ) den  $i, j$ -ten Eintrag von  $S_n$  (bzw.  $S$ ) bezeichnet. Wir schreiben dann  $S := \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ .

Wir wollen im folgenden das Konzept der absoluten Konvergenz auf den Fall von Matrizenreihen übertragen. Dazu benötigen wir

**Definition 10.4.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  und sei  $\mathbb{K}^n$  versehen mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|\cdot\|_2$ . Ist dann  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ , so definieren wir die *Operatornorm*  $\|A\|_{op}$  von  $A$  durch

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|Az\|_2 : z \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|z\|_2 \leq 1\}.$$

(Da die Abbildung  $z \mapsto \|Az\|_2$  stetig auf der kompakten Menge  $B_1 = \{z \in \mathbb{K}^n : \|z\|_2 \leq 1\}$  ist, nimmt sie auf  $B_1$  ihr Maximum an. Die Abbildung ist  $\|A\|_{op}$  ist daher wohldefiniert.)

**Lemma 10.5.** Die Abbildung  $\|\cdot\|_{op} : M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow [0, \infty)$ ;  $A \mapsto \|A\|_{op}$  ist eine Norm auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $M(n \times n, \mathbb{K})$ . Ferner gelten:

- (i)  $\|Az\|_2 \leq \|A\|_{op}\|z\|_2$  für alle  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ,  $z \in \mathbb{K}^n$ ;
- (ii)  $\|AB\|_{op} \leq \|A\|_{op}\|B\|_{op}$  für alle  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ , und
- (iii)  $\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \|A\|_{op}$  für alle  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Insbesondere folgt  $|a_{ij}| \leq \|A\|_{op}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ .

*Proof.* Man rechnet leicht nach, dass  $\|\lambda A\|_2 = |\lambda| \|A\|_{op}$  und  $\|A\|_{op} = 0 \Rightarrow A = 0$  gelten. Für die Dreiecksungleichung seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ . Da die Abbildung  $z \mapsto \|(A+B)z\|_2$  auf der Einheitskugel  $B_1 \subseteq \mathbb{K}^n$  ihr Maximum annimmt, existiert ein  $z_0 \in B_1$  mit  $\|A+B\|_{op} = \|(A+B)z_0\|_2$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|A+B\|_{op} &= \|(A+B)z_0\|_2 = \|Az_0 + Bz_0\|_2 \leq \|Az_0\|_2 + \|Bz_0\|_2 \\ &\leq \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|Az\|_2 + \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|Bz\|_2 = \|A\|_{op} + \|B\|_{op}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $\|\cdot\|_{op}$  eine Norm ist. Die Aussage in (1) folgt direkt aus der Definition von  $\|A\|_{op}$ : Ist  $z = 0$ , so ist auch  $Az = 0$  und es folgt  $0 = \|A0\|_2 = \|A\|_{op}\|0\|_2$ . Ist  $z \neq 0$ , so ist  $\frac{1}{\|z\|_2}z \in B_1$  und es folgt

$$\|Az\|_2 = \|A\left(\frac{1}{\|z\|_2}z\right)\|_2 \|z\|_2 \leq \|A\|_{op} \|z\|_2.$$

Für den Beweis von (2) sei  $z \in B_1$  beliebig. Dann folgt mit (1):

$$\|ABz\|_2 \stackrel{(1)}{\leq} \|A\|_{op} \|Bz\|_2 \stackrel{(1)}{\leq} \|A\|_{op} \|B\|_{op} \|z\|_2 \stackrel{\|z\|_2 \leq 1}{\leq} \|A\|_{op} \|B\|_{op}.$$

Dann folgt auch  $\|AB\|_{op} = \sup_{z \in B_1} \|ABz\|_2 \leq \|A\|_{op} \|B\|_{op}$ .

Für den Beweis von (3) sei  $j \in \{1, \dots, n\}$  fest und betrachte  $z = e_j \in B_1$ . Dann folgt

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \|Ae_j\|_2^2 \leq \|A\|_{op}^2.$$

Es folgt  $\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \|A\|_{op}$ . Da  $|a_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2}$  folgt (3).  $\square$

**Definition 10.6.** Eine Reihe von Matrizen  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  heißt *absolut konvergent*, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_{op}$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

**Bemerkung 10.7.** Anstelle von  $\|\cdot\|_{op}$  könnte man hier auch jede andere Norm auf  $M(n \times n, \mathbb{K})$  einsetzen. Da alle Normen auf endlich-dimensionalen Räumen äquivalent sind, wäre der entsprechende Begriff von absoluter Konvergenz äquivalent zu dem obigen.

**Satz 10.8.** *Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  ist konvergent. Es gilt dann sogar, dass für jedes  $1 \leq i, j \leq n$  die Reihe der  $i, j$ -ten Einträge  $\sum_{k=0}^{\infty} (A_k)_{i,j}$  von  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  absolut konvergent ist.*

*Proof.* Nach Lemma ?? gilt für alle  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(A_k)_{i,j}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_{op}.$$

Damit ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_{op}$  eine konvergente Majorante von  $\sum_{k=0}^{\infty} |(A_k)_{i,j}|$ .  $\square$

**Folgerung 10.9.** *Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  eine Potenzreihe in  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  mit Konvergenzreihe  $R > 0$  (d.h., die Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{K}$  mit  $|z| < R$  absolut und sie divergiert, wenn  $|z| > R$ ). Ist dann  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  mit  $\|A\|_{op} < R$ , so konvergiert die Reihe  $f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$  absolut in  $M(n \times n, \mathbb{K})$ .*

*Proof.* Nach Lemma ?? (2) gilt  $\|A^k\|_{op} \leq \|A\|_{op}^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|_{op} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A^k\|_{op} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A\|_{op}^k < \infty.$$

Da  $\|A\|_{op} < R$  ist die Reihe auf der rechten Seite konvergent.  $\square$

Die Exponentialreihe  $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$  hat bekanntlich den Konvergenzradius  $R = \infty$ . Wenden wir die Folgerung auf diese Reihe an, so können wir definieren:

**Definition 10.10.** Für  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  definieren wir

$$\exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

**Bemerkung 10.11.** (1) Ist  $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$  eine reelle Matrix, so ist jede Komponente von  $\exp(B)$  ein Grenzwert einer reellen Folge, und damit ist auch  $\exp(B) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ .

(2) Ist  $A = C^{-1}BC$  für ein  $C \in GL(n, \mathbb{C})$ , so folgt

$$\begin{aligned} A^k &= (C^{-1}BC) \cdot (C^{-1}BC) \cdots (C^{-1}BC) = C^{-1}B(C^{-1}C)B(C^{-1}C) \cdots (C^{-1}C)BC \\ &= C^{-1}BEBE \cdots EBC = C^{-1}B^kC, \end{aligned}$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$ , und damit folgt

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1}B^kC \stackrel{(*)}{=} C^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) C = C^{-1} \exp(B)C.$$

Hierbei folgt die Gleichung (\*) wegen der Stetigkeit der Abbildung  $A \mapsto C^{-1}AC$  bezüglich  $\|\cdot\|_{op}$ , denn für alle  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  gilt

$$\|C^{-1}AC - C^{-1}BC\|_{op} = \|C^{-1}(A - B)C\|_{op} \leq \|C^{-1}\|_{op} \|C\|_{op} \|A - B\|_{op}.$$

Ähnlich wie im Komplexen erhält man eine überaus nützliche Funktionalgleichung:

**Lemma 10.12.** Seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $A \cdot B = B \cdot A$ . Dann gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

*Proof.* Sind  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $A \cdot B = B \cdot A$ , so folgt mit dem üblichen Induktionsbeweis (siehe LA1) die Binomische Formel

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j \cdot B^{k-j},$$

für all  $k \in \mathbb{N}_0$ . Mit dem Cauchy-Produkt (CP) für absolut konvergente Reihen (in einer entsprechenden Version für Matrixreihen) folgt dann

$$\begin{aligned}
\exp(A) \cdot \exp(B) &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) \\
&\stackrel{\text{CP}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k \left( \frac{1}{j!} A^j \right) \cdot \left( \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j} \right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j \cdot B^{k-j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \quad (\text{Binomische Formel}) \\
&= \exp(A+B)
\end{aligned}$$

□

Ist  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ , so wollen wir nun die Matrixwertige Funktion

$$Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n; Y(t) := \exp(tB)$$

betrachten. Wir definieren Differenzierbarkeit von Matrixwertigen Funktionen wie für Vektorwertige Funktionen durch die Differenzierbarkeit aller Komponenten. Dies ist wieder äquivalent zur (komponentenweisen) Existenz des Grenzwertes

$$Y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y(t+h) - Y(t)).$$

**Satz 10.13.** *Seien  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ,  $Y(t) := \exp(tB)$  und  $y_0 \in \mathbb{C}^n$ . Dann gelten:*

- (i)  $Y'(t) = B \cdot \exp(tB) = B \cdot Y(t)$ .
- (ii)  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ;  $y(t) := \exp(tB) \cdot y_0$  ist eine Lösung des Systems  $y' = B \cdot y$ ,  $y(0) = y_0$ .

*Beweis:* Betrachten wir die Funktion

$$Y(t) = \exp(tB) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k,$$

so stellen wir fest, dass jede Komponente  $Y(t)_{ij}$  von  $Y(t)$  durch eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} d_{ij}(k)t^k$  gegeben ist, wobei  $d_{ij}(k)$  die  $ij$ -te Komponente der Matrix  $\frac{1}{k!} B^k$  ist. Da die Exponentialreihe für alle  $tB$  absolut konvergiert, haben alle diese Reihen unendlichen Konvergenzradius, und wir dürfen auf ganz  $\mathbb{R}$  gliedweise differenzieren (siehe Analysis). Damit folgt

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} B^k = B \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} B^{k-1} \right) \\
&= B \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k \right) = B \cdot \exp(tB).
\end{aligned}$$

Mit (1) erhalten wir für  $y(t) = Y(t) \cdot y_0$ :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (y(t+h) - y(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y(t+h) \cdot y_0 - Y(t) \cdot y_0) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Y(t+h) - Y(t)) \right) \cdot y_0 = B \cdot Y(t) \cdot y_0 \\ &= B \cdot y(t) \end{aligned}$$

und  $y(0) = \exp(0B) \cdot y_0 = E_n \cdot y_0 = y_0$ .<sup>1</sup>

□

**Bemerkung 10.14.** (1) Man kann auch hier zeigen, dass die im Satz angegebene Lösung die **einzige** Lösung des homogenen Anfangswertproblems  $y' = By$  mit der Anfangsbedingung  $y(0) = y_0$  ist!

(2) Da  $\exp(tB) \in M(n \times n, \mathbb{R})$  wenn  $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$  (siehe Bemerkung ??) folgt: Sind  $B$  und  $y_0$  reell, so ist auch  $y(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  reell!

Wir wollen nun noch eine Lösungsformel für das inhomogene Anfangswertproblem

$$(10.1) \quad y' = By + f, y(0) = y_0$$

angeben. Hierfür betrachten wir den Ansatz:  $y(t) = Y(t)c(t)$  für eine stetig differenzierbare Funktion  $c : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  und  $Y(t) = \exp(tB)$ . Einsetzen in (??) liefert wegen  $y(0) = Y(0)c(0) = c(0)$  und  $Y'(t) = BY(t)$ :

$$\begin{aligned} Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) &= BY(t)c(t) + f(t), & c(0) &= y_0 \\ \iff Y(t)c'(t) &= f(t), & c(0) &= y_0 \\ \iff c'(t) &= Y(t)^{-1}f(t), & c(0) &= y_0 \\ \iff c(t) &= c(0) + \int_0^t Y(s)^{-1}f(s) ds, & c(0) &= y_0 \\ \iff c(t) &= y_0 + \int_0^t \exp(-sB)f(s) ds, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass  $\exp(-tB)\exp(tB) = \exp((-t+t)B) = \exp(0B) = E_n$  gilt, also  $Y(t)^{-1} = \exp(tB)^{-1} = \exp(-tB)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Zusammen erhalten wir nun:

**Satz 10.15.** Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $0 \in I$ . Dann ist

$$y(t) = \exp(tB) \left( y_0 + \int_0^t \exp(-sB)f(s) ds \right)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems  $y' = By + f, y(0) = y_0$ .

**10.16. Berechnung der Funktion  $Y(t) = \exp(tB)$ .** Wir wollen nun überlegen, wie wir die Funktion  $Y(t) = \exp(tB)$  für  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit Hilfe einer Jordan-Normalform von  $B$  explizit berechnen können. Da jedes Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren zerfällt, können wir nach Satz 9.6 eine Matrix  $C \in GL(n, \mathbb{C})$  finden (und im Prinzip auch berechnen), so dass  $A = C^{-1}BC$  eine Jordan-Matrix ist. Dann folgt  $tB = CtAC^{-1}$  und  $\exp(tB) = C \exp(tA)C^{-1}$ . Es genügt also zu wissen, wie die Funktion  $\exp(tA)$  für jede Jordan-Matrix  $A$  berechnet werden kann.

<sup>1</sup>Ist  $0_n \in M(n \times n, \mathbb{C})$  die Null-Matrix, so folgt  $\exp(0_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0_n^k = \frac{1}{0!} 0_n^0 = 1 \cdot E_n = E_n$ .

Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

eine beliebige Jordan-Matrix mit den Jordan-Kästen  $J_1, \dots, J_m$ . Nach den Rechenregeln für Blockmatrizen gilt dann

$$A^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix},$$

und daraus folgt schnell

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(tJ_m) \end{pmatrix}.$$

Es genügt also zu wissen, wie die Matrix  $\exp(tJ)$  zu berechnen ist, wenn

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(k \times k, \mathbb{C}).$$

Dann gilt aber  $J = \lambda E + N$  mit  $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Da  $\lambda E$  mit  $N$  vertauscht

(und dann auch  $t\lambda E$  mit  $tN$ ) folgt mit Lemma ??, dass

$$\exp(tJ) = \exp(t\lambda E + tN) = \exp(t\lambda E) \cdot \exp(tN).$$

Wegen  $(t\lambda E)^k = (t\lambda)^k E$  folgt

$$\exp(t\lambda E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\lambda E)^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\lambda)^k \right) E = e^{t\lambda} E.$$

Eine leichte Rechnung (benutze Lemma 9.9) ergibt ferner, dass

$$N^l := (0, \dots, 0, e_1, \dots, e_{k-l}),$$

wobei die ersten  $l$  Einträge aus Nullspalten bestehen, und dann die ersten  $k-l$  Einheitsvektoren des  $\mathbb{C}^k$  als weitere Spalten der Matrix  $N^l$  auftreten. Insbesondere gilt  $N^k = 0$ . Einsetzen

in die Exponentialreihe ergibt (mit  $N^0 = E$ ):

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^k}{k!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & & & 0 & 1 & t \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen folgt

$$\exp(tJ) = e^{t\lambda} \exp(tN) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2 e^{t\lambda}}{2} & \frac{t^3 e^{t\lambda}}{3!} & \cdots & \frac{t^{k-1} e^{t\lambda}}{(k-1)!} & \frac{t^k e^{t\lambda}}{k!} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2 e^{t\lambda}}{2} & \frac{t^3 e^{t\lambda}}{3!} & \cdots & \frac{t^{k-1} e^{t\lambda}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2 e^{t\lambda}}{2} \\ & & & & 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ & & & & & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 10.17.** Sei  $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  eine

Transformations-Matrix mit  $A = C^{-1}BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Damit folgt  $\exp(tB) =$

$C \exp(tA) C^{-1}$  mit

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen ergibt:

$$Y(t) := \exp(tB) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & -1 - t - t^2 + e^{2t} & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 - e^{2t} + 2te^{2t} \\ 0 & 1 & 2t & -1 - 2t + e^{2t} & 1 + t - e^{2t} + 2te^{2t} \\ 0 & 0 & 1 & -1 + e^{2t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} + 2te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 2te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Für das System  $y' = By$ ,  $y(0) = (1, 0, 2, 0, 1)^t$  ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = Y(t)y_0 = \begin{pmatrix} 2 + t + \frac{5}{2}t^2 - e^{2t} + 2te^{2t} \\ 1 + 3t - e^{2t} + 2te^{2t} \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$