

## IV. Affine Abbildungen



## 1. Kongruenzabbildungen

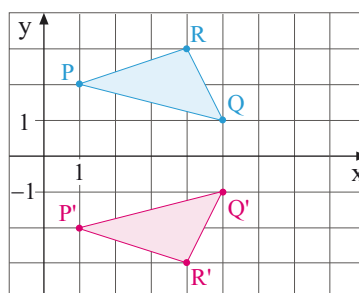
Bei einer **Kongruenzabbildung** wird jedem Punkt  $P(x|y)$  der zweidimensionalen Ebene  $\mathbb{R}^2$  in eindeutiger Weise ein Bildpunkt  $P'(x'|y')$  von  $\mathbb{R}^2$  zugeordnet. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Punktes  $P$  und seines Bildpunktes  $P'$  kann man durch  $2 \times 2$ -Matrizen und Vektoren beschreiben.

Für die aus der Sekundarstufe I bekannten Kongruenzabbildungen Spiegelung, Drehung und Verschiebung kann der Zusammenhang sowohl durch Abbildungsgleichungen als auch mit Hilfe von Matrizen und Vektoren dargestellt werden.

### A. Spiegelungen

#### Beispiel: Spiegelung an der x-Achse

Spiegeln Sie das Dreieck  $PQR$  mit  $P(1|2)$ ,  $Q(5|1)$ ,  $R(4|3)$  an der x-Achse. Geben Sie die Abbildungsgleichungen und die Matrixdarstellung der Abbildung an. Wie lauten die Bildpunkte?



Lösung:

Bei der Spiegelung an der x-Achse wird der Punkt  $P(x|y)$  auf den Punkt  $P'(x|-y)$  abgebildet. Für die Koordinaten  $x'$  und  $y'$  des Bildpunktes  $P'$  gelten daher die beiden **Abbildungsgleichungen**  $x' = x$ ,  $y' = -y$ . Dieser Zusammenhang lässt sich auch durch linksseitige Multiplikation des Ortsvektors des Punktes  $P$  mit einer quadratischen  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  beschreiben, welche man als **Abbildungsmatrix** bezeichnet.

Als Bildpunkte erhalten wir hier:

▶  $P'(1|-2)$ ,  $Q'(5|-1)$  und  $R'(4|-3)$ .

#### Abbildungsgleichungen:

$$x' = x, \quad y' = -y$$

#### Darstellung mit der Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = A \cdot \vec{p}$$

#### Bildpunkte:

$$\vec{p}' = A \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P'(1|-2)$$

Analog folgt:  $Q'(5|-1)$  und  $R'(4|-3)$

### Übung 1 Spiegelung

- Wie lauten die Bildpunkte von  $A(7|-3)$  und  $B(-4|2)$  bei Spiegelung an der x-Achse?
- Welcher Punkt  $P$  wird bei der Spiegelung an der x-Achse auf den Punkt  $P'(-6|5)$  abgebildet?
- Wie lauten die Abbildungsgleichungen und die Matrix bei Spiegelung an der y-Achse?
- Wie lauten die Abbildungsgleichungen und die Matrix bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = x$  des 1. und 3. Quadranten?

### Übung 2 Spiegelung an einer Winkelhalbierenden

- Konstruieren Sie die Bildpunkte der Dreiecks mit den Ecken  $A(2|-6)$ ,  $B(4|9)$  und  $C(-5|-7)$  bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden  $y = -x$  des 2. und 4. Quadranten.
- Wie lauten die Abbildungsgleichungen und die Matrixdarstellung dieser Abbildung?

## B. Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Winkel $\alpha$

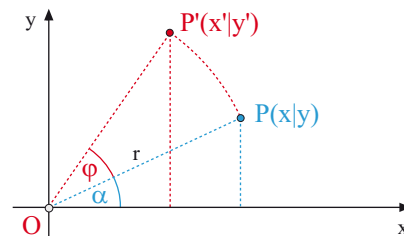
Als zweites Beispiel betrachten wir nun eine Abbildung, die jeden Punkt  $P(x|y)$  der Ebene im mathematisch positiven Sinne um den Winkel  $\varphi$  um den Ursprung dreht.

$\alpha$  sei der Winkel zwischen der x-Achse und der Strecke  $\overline{OP}$ .

$r$  sei die Länge der Strecke  $\overline{OP}$ .

Damit lassen sich die Punktkoordinaten  $x, y$  bzw.  $x', y'$  durch die nebenstehenden Gleichungen (1) bzw. (2) darstellen. Die Gleichungen (2) lassen sich mit Hilfe der **Additionstheoreme** (vgl. *Mathematischen Streifzug* auf Seite 124) zu (3) umformen.

Durch Einsetzen von (1) in (3) erhalten wir die Abbildungsgleichungen (4). Die Matrixdarstellung enthält eine nur vom Winkel  $\varphi$  abhängige Matrix  $A$ , welche man als **Drehmatrix** bezeichnet. Durch Multiplikation mit dieser Matrix kann man also Punkte um den Ursprung drehen.



$$(1) x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

$$(2) x' = r \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

$$(3) x' = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi$$

$$y' = r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi$$

$$(4) x' = \cos \varphi \cdot x - \sin \varphi \cdot y$$

$$y' = \sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot y$$

$$(5) \vec{p}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \vec{p}$$

### Übung 3 Drehung

- Auf welchen Punkt wird  $P(2|5)$  bei einer Drehung um  $30^\circ$  abgebildet?
- Welches Bilddreieck entsteht bei Drehung der Dreiecks  $A(3|1)$ ,  $B(6|-3)$ ,  $C(4|5)$  bei einer Drehung um  $180^\circ$ ?

## C. Verschiebungen

Bei einer **Verschiebung** um  $v_1$  in x-Richtung und um  $v_2$  in y-Richtung wird der Punkt  $P(x|y)$  auf den Bildpunkt  $P'(x + v_1 | y + v_2)$  abgebildet.

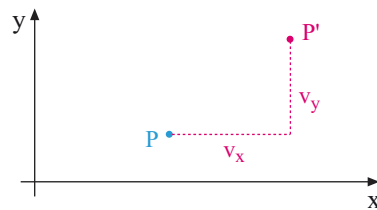
Bei dieser Abbildung ergibt sich der Bildvektor  $\vec{v}'$  nicht durch Multiplikation einer Matrix  $A$  mit dem Original  $\vec{v}$ .

Die Verschiebung kann aber beschrieben werden mit Hilfe des **Verschiebungsvektors**  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ :  $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{v}$ .

### Übung 4 Verschiebung

Eine Verschiebung wird durch den Verschiebungsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$  beschrieben.

- Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes von  $P(-1|5)$ ?
- Welcher Punkt  $P$  wird auf  $P'(8|2)$  abgebildet?



**Abbildungsgleichungen:**

$$x' = x + v_1, \quad y' = y + v_2$$

**Darstellung mit dem Verschiebungsvektor:**

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{v}$$

## Additionstheoreme

Auf der vorstehenden Seite wurden zwei Formeln verwendet, bei denen als Argument der trigonometrischen Funktionen Sinus bzw. Kosinus die Summe zweier Winkel auftritt. Diese Formeln bezeichnet man als **Additionstheoreme**. Für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gilt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Weitere Additionstheoreme findet man in den gebräuchlichen Formelsammlungen. Sie besitzen allesamt zahlreiche Anwendungsfälle. Im Folgenden soll die erste der obigen Formeln bewiesen werden. Den Beweis der zweiten Formel überlassen wir einer Übung.

Beim Beweis des Additionstheorems

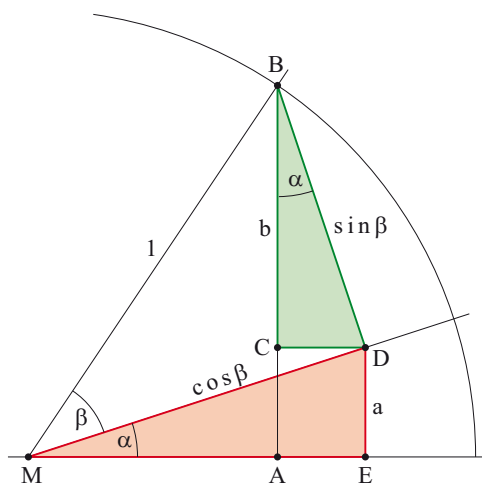
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

beschränken wir uns auf positive Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ .

Das nebenstehende Bild zeigt einen Einheitskreis mit den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ .

$\triangle ABD$  hat ebenfalls das Maß  $\alpha$ , denn die Strecke  $\overline{BA}$  steht senkrecht auf dem Schenkel  $\overline{MA}$  des Winkels  $\sphericalangle AMD$  und die Strecke  $\overline{BD}$  steht senkrecht auf dem Schenkel  $\overline{MD}$  des Winkels  $\sphericalangle AMD$ .

Sowohl das rote als auch das grüne Dreieck sind rechtwinklig. Die rechten Winkel liegen bei  $E$  bzw.  $C$ .



Das Maß von  $\sphericalangle AMB$  ist gleich  $\alpha + \beta$ . Dem obigen Bild kann man entnehmen:

$$\sin(\alpha + \beta) = |\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}| = |\overline{ED}| + |\overline{CB}| = a + b.$$

Wir bestimmen im Folgenden  $a$  und  $b$ .

Im roten Dreieck gilt  $\sin \alpha = \frac{a}{\cos \beta}$ , also folgt:  $a = \sin \alpha \cdot \cos \beta$ .

Im grünen Dreieck gilt  $\cos \alpha = \frac{b}{\sin \beta}$ , also folgt:  $b = \cos \alpha \cdot \sin \beta$ .

Mit  $\sin(\alpha + \beta) = a + b$  ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

### Übung

Beweisen Sie das Additionstheorem  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ .

*Hinweis:* Aus dem obigen Bild kann man ablesen:  $\cos(\alpha + \beta) = |\overline{MA}| = |\overline{ME}| - |\overline{AE}|$ .

## 2. Affine Abbildungen

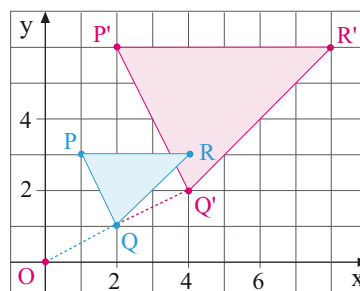
Im 1. Abschnitt wurden drei elementare Abbildungen behandelt, die durch Abbildungsgleichungen der Form  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p}$  oder  $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{v}$  beschrieben werden. Bevor wir solche Abbildungen zur Klasse der **affinen Abbildungen**  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}$  zusammenfassen und deren Eigenschaften näher untersuchen, sollen zwei weitere Abbildungen betrachtet werden, die ebenfalls aus der Sekundarstufe 1 bekannt sind, nämlich die Streckung mit dem Koordinatenursprung O als Streckzentrum mit dem Streckfaktor  $k$  sowie die Scherung mit der  $x$ -Achse als Scherachse.

### A. Streckung mit dem mit dem Streckfaktor $k$ und dem Streckzentrum O

Rechts ist die **Streckung** eines Dreiecks PQR mit dem Streckfaktor  $k = 2$  und dem Ursprung O als **Streckzentrum** dargestellt. Dabei gilt  $P(1|3)$ ,  $Q(2|1)$  und  $R(4|3)$ .

Bei der Konstruktion des Bildpunktes  $P'(x'|y')$  ist zu beachten, dass die Punkte O, P und  $P'$  auf einer Ursprungsgeraden liegen und die Entfernung von O nach  $P'$  genau doppelt so lang ist wie die Strecke von O nach P. Es gilt also  $x' = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $y' = 2 \cdot 3 = 6$ , d. h., es ist  $P'(2|6)$ . Die Bildpunkte  $Q'(4|2)$  und  $R'(10|6)$  werden entsprechend errechnet.

Allgemein gelten die Abbildungsgleichungen  $x' = kx$  und  $y' = ky$ . Die Abbildungsmatrix ist dann  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ .



**Abbildungsgleichungen:**

$$x' = 2x, \quad y' = 2y$$

**Matrixdarstellung / Streckmatrix:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } \vec{p}' = A \cdot \vec{p} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### Übung 1 Streckung mit negativem Streckfaktor $k < 0$

- Erläutern Sie, wie sich eine Streckung mit dem negativen Streckfaktor  $k = -0,5$  auswirkt.
- Konstruieren und berechnen Sie das Bild  $P'Q'R'$  des Dreiecks  $P(2|4)$ ,  $Q(4|2)$ ,  $R(6|6)$  bei Streckung mit dem Streckfaktor  $k = -0,5$ .

### Übung 2 Umkehrung einer Streckung

Das Dreieck PQR mit  $P(1|-2)$ ,  $Q(3|1)$ ,  $R(-2|1)$  wird um O mit dem Faktor  $k = 3$  gestreckt.

- Geben Sie die Koordinaten des Bilddreiecks  $P'Q'R'$  an.
- Mit welcher Streckung erhält man aus dem Bilddreieck  $P'Q'R'$  das ursprüngliche Dreieck PQR? Geben Sie die Abbildungsgleichungen und die Matrixdarstellung an.

### Übung 3 Verschiedene Abbildungen

Gegeben ist das Dreieck  $P(4|2)$ ,  $Q(2|6)$ ,  $R(-2|4)$ .

Ermitteln Sie die Koordinaten des Bilddreiecks  $P'Q'R'$  bei der

- Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten,
- Verschiebung mit dem Verschiebungsvektor,
- Drehung um den Koordinatenursprung O mit dem Drehwinkel  $\alpha = 30^\circ$ ,
- Streckung mit dem Streckfaktor  $k = 0,5$  und dem Ursprung als Streckzentrum.

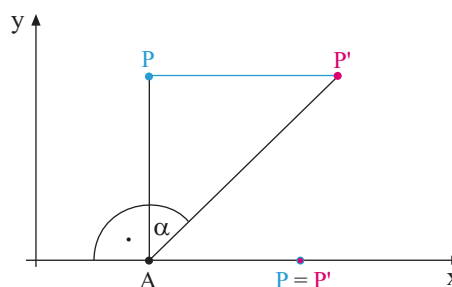
### B. Scherung mit der x-Achse als Scherachse

Bei einer Scherung mit der Scherachse  $AB$  wird ein Rechteck  $ABCD$  auf ein Parallelogramm  $A'B'C'D'$  abgebildet, wobei  $A' = A$  und  $B' = B$  ist. Eine Scherung bewirkt also eine gewisse Verzerrung.



Die **Scherung** mit der x-Achse als **Scherachse** und dem **Scherwinkel**  $\alpha$  hat folgende Eigenschaften:

1. Ein Punkt auf der x-Achse wird auf sich selbst abgebildet.
2. Der Bildpunkt  $P'$  eines Punktes  $P$  liegt auf der Parallelen zur x-Achse durch  $P$ . Die Strecke  $\overline{PP'}$  ist parallel zur x-Achse.
3. Ist  $A$  der Lotfußpunkt des Punktes  $P$  auf der x-Achse, so ist der Winkel  $\sphericalangle PAP'$  der vorgegebene Scherwinkel  $\alpha$ .



Aus diesen Eigenschaften ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$  und den Koordinaten  $x', y'$  seines Bildpunktes  $P'$ :

1.  $\frac{x'-x}{y} = \tan \alpha \Leftrightarrow x' = x + y \cdot \tan \alpha$ ,
2.  $y' = y$ .

Aus diesen Abbildungsgleichungen ergibt sich die rechts aufgeführte Schermatrix.

**Abbildungsgleichungen der Scherung:**

$$x' = x + y \cdot \tan \alpha, \quad y' = y$$

**Schermatrix zum Scherwinkel  $\alpha$ :**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } \vec{p}' = A \cdot \vec{p} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & \tan \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Übung 4 Scherung

Betrachtet wird die Scherung mit der x-Achse als Scherachse und dem Scherwinkel  $\alpha = 45^\circ$ .

- a) Geben Sie die Abbildungsgleichungen und die Schermatrix  $M$  an.
- b) Konstruieren Sie das Bild  $A'B'C'D'$  des Rechtecks  $ABCD$  mit  $A(2|4)$ ,  $B(5|4)$ ,  $C(5|6)$ ,  $D(2|6)$ . Kontrollieren Sie die graphische Konstruktion rechnerisch.
- c) Auf welchen Punkt  $P'$  wird  $P(-2|4)$  abgebildet?
- d) Welcher Punkt  $Q$  wird auf  $Q'(6|3)$  abgebildet?

#### Übung 5 Scherung

Eine Scherung mit der x-Achse als Scherachse bildet den Punkt  $P(4|2)$  auf den Punkt  $P'(8|2)$  ab.

- a) Konstruieren Sie zeichnerisch die Bildpunkte  $A'$  und  $B'$  von  $A(2|6)$  und  $B(-3|-4)$ .
- b) Bestimmen Sie zunächst  $\tan \alpha$  und anschließend den Scherwinkel  $\alpha$ .
- c) Bestätigen Sie die Ergebnisse von a) durch Rechnung. Verwenden Sie die zu diesem Zweck die Abbildungsmatrix oder die Abbildungsgleichungen.

#### Übung 6 Vermischte Abbildungen

Welche Art von Abbildung wird durch die Abbildungsgleichungen definiert?

- |              |              |                 |                 |
|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| a) $x' = -x$ | b) $x' = -y$ | c) $x' = x - 2$ | d) $x' = x + y$ |
| $y' = y$     | $y' = x$     | $y' = y + 4$    | $y' = y$        |

### C. Die Definition der affinen Abbildung

Die meisten der bisher betrachteten Abbildungen können durch eine Abbildungsgleichungen der Form  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p}$  mit einer  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  beschrieben werden. Man spricht in diesen Fällen von **linearen Abbildungen**. Die Verschiebung passt mit ihrer Abbildungsgleichungen  $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{v}$  nicht in dieses Schema. Man kann aber auch bei der Verschiebung eine Matrix ins Spiel bringen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist die } 2 \times 2\text{-Einheitsmatrix } E.$$

Damit werden alle bisher betrachteten Abbildungen durch Gleichungen der Form  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}$  beschrieben. Bei den linearen Abbildungen ist  $\vec{v}$  der Nullvektor  $\vec{0}$  und bei der Verschiebung ist  $A$  die Einheitsmatrix  $E$ . Weil bei diesen Abbildungen Originalfiguren und ihre Bildfiguren gewisse „Verwandtschaften“ aufweisen, nennt man sie **affin** (affins [lat.]: verschwägert, verwandt).

#### Definition IV.1: Affine Abbildung

Eine Abbildung, die jedem Punkt  $P(x|y)$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  |  $P(x|y|z)$  des Raumes  $\mathbb{R}^3$  durch die **Abbildungsgleichungen**

$$\begin{array}{l} x' = a \cdot x + b \cdot y + v_1 \\ y' = c \cdot x + d \cdot y + v_2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + v_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + v_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + v_3 \end{array} \right.$$

bzw. die **Matrix-Vektor-Darstellung**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

einen Bildpunkt  $P'(x|y)$  des  $\mathbb{R}^2$  |  $P'(x|y|z)$  des  $\mathbb{R}^3$  zuordnet, heißt **affine Abbildung**.

Kurzschreibweise mit **Abbildungsmatrix**  $A$  und dem **Verschiebungsvektor**  $\vec{v}$ :

$$\boxed{\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}}$$

#### Beispiel: Berechnung eines Bildpunktes

Eine affine Abbildung  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}$  sei festgelegt durch  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .  
Ermitteln Sie den Bildpunkt  $P'$  des Punktes  $P(-3|2)$ .

Lösung:

Wir verwenden die Matrix-Vektor-Darstellung zur Berechnung der Koordinaten des Bildpunktes  $P'$  von  $P$ .

Ergebnis:  $P'(3|9)$ .

#### Berechnung des Bildpunktes $P'$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 1 \\ (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### Übung 7 Affine Abbildung eines Dreiecks

Auf welches Dreieck  $A'B'C'$  wird das Dreieck  $A(-1|-2)$ ,  $B(1|-2)$ ,  $C(2|1)$  mit der affinen Abbildung aus dem obigen Beispiel abgebildet? Zeichnen Sie beide Dreieck in ein x-y-System.

### D. Bestimmung einer Abbildungsmatrix

Kennt man bei einer affinen Abbildung **ohne Verschiebungsvektor** die Koordinaten der Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  zweier Punkte  $P$  und  $Q$ , so sind die Abbildungsmatrix und die Abbildungsgleichungen eindeutig festgelegt. Wir zeigen das an einem Beispiel auf.

#### ▶ Beispiel: Bestimmung einer Abbildungsmatrix

Bei einer affinen Abbildung ohne Verschiebung wird der Punkt  $P(1|-2)$  auf den Punkt  $P'(0|-1)$  und der Punkt  $Q(-2|3)$  auf den Punkt  $Q'(-1|-1)$  abgebildet. Bestimmen die Abbildungsgleichungen und die Abbildungsmatrix der affinen Abbildung.

Lösung:

Wie setzen die Koordinaten der gegebenen Punkte  $P$  und  $Q$  und ihrer Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  in die Abbildungsgleichungen aus Definition IV.1 ein.

Es ergeben sich zwei lineare  $2 \times 2$ -Gleichungssysteme (Gleichungen I und III bzw. Gleichungen II und IV).

Beide Gleichungssysteme werden mit dem Additionsverfahren gelöst, wie rechts dargestellt.

Aus der Lösung erhalten wir unmittelbar die Abbildungsgleichungen sowie die Matrix der affinen Abbildung.

#### Punkte $P$ und $P'$ :

$$\text{I: } 1 \cdot a - 2 \cdot b = 0$$

$$\text{II: } 1 \cdot c - 2 \cdot d = -1$$

#### Punkte $Q$ und $Q'$ :

$$\text{III: } -2 \cdot a + 3 \cdot b = -1$$

$$\text{IV: } -2 \cdot c + 3 \cdot d = -1$$

#### Lösung des Gleichungssystems:

$$2 \cdot \text{I} + \text{III: } b = -1 \Leftrightarrow b = -1$$

$$\text{in I: } a = 2$$

$$2 \cdot \text{II} + \text{IV: } -d = -3 \Leftrightarrow d = 3$$

$$\text{in II: } c = 5$$

#### Abbildungsgleichungen und Matrix:

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= -7x - 3y \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

### Übung 8 Bestimmung einer affinen Abbildung ohne Verschiebung

Wie lauten die Abbildungsgleichungen und die Abbildungsmatrix der affinen Abbildung, welche die Punkte  $P(-5|3)$  und  $Q(5|3)$  ohne Verschiebung auf  $P'(3|-4)$  und  $Q'(-2|5)$  abbildet?

Für die Bestimmung einer affinen Abbildung **mit Verschiebungsvektor**  $\vec{v} \neq \vec{0}$  benötigt man die Koordinaten von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  und ihrer Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$ . Man erhält dann zwei lineare  $3 \times 3$ -Gleichungssysteme, die mit einem geeigneten Taschenrechner oder mit einem Computerprogramm sehr einfach zu lösen sind.

### Übung 9 Bestimmung einer affinen Abbildung mit Verschiebung

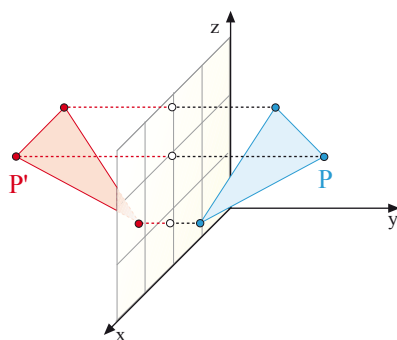
Eine affine Abbildung bildet den Punkt  $P(1|3)$  auf  $P'(2|3)$ , den Punkt  $Q(4|2)$  auf den Punkt  $Q'(9|-12)$  und den Punkt  $R(-1|-3)$  auf den Punkt  $R'(4|-7)$  ab.

- Weisen Sie nach, dass die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  nicht auf einer Geraden liegen.
- Bestimmen Sie die Abbildungsgleichungen, die Abbildungsmatrix und den Verschiebungsvektor der affinen Abbildung.

### E. Abbildungen im $\mathbb{R}^3$

Bisher wurden nur Beispiele für Abbildungen im  $\mathbb{R}^2$  betrachtet. Im dreidimensionalen Raum geht man analog vor. Wir betrachten als Beispiele eine Spiegelung und eine Projektion.

#### Spiegelung an der x-z-Ebene:



Bei dieser Spiegelung bleiben x-Koordinate und z-Koordinate erhalten. Die y-Koordinate erfährt eine Vorzeichenumkehr.

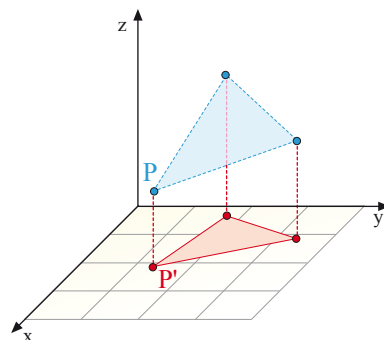
Die Abbildungsgleichungen lauten daher:

$$x' = x, y' = -y, z' = z.$$

Die Matrixdarstellung der Abbildung ist

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}.$$

#### Senkrechte Projektion auf die x-y-Ebene:



Bei dieser senkrechten Projektion bleiben x-Koordinate und y-Koordinate erhalten. Die z-Koordinate wird auf null gesetzt.

Die Abbildungsgleichungen lauten also:

$$x' = x, y' = y, z' = 0.$$

Die Matrixdarstellung der Abbildung ist

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}.$$

#### Übung 10

Wir betrachten diejenige affine Abbildung im  $\mathbb{R}^3$ , die eine orthogonale Spiegelung an der x-z-Ebene bewirkt.

- Wie lautet die Abbildungsmatrix?
- Bestimmen Sie das Bild des Dreiecks ABC mit  $A(2|-3|1)$ ,  $B(3|-1|2)$ ,  $C(1|-2|4)$ .
- Bestimmen Sie das Bild des Dreiecks ABC mit  $A(2|-3|1)$ ,  $B(3|-1|2)$ ,  $C(1|-2|4)$  bei einer Spiegelung an der x-y-Ebene. Wie lautet nun die Abbildungsmatrix

#### Übung 11

Welche anschauliche Bedeutung hat die affine Abbildung *ohne* Verschiebung im  $\mathbb{R}^3$ , deren Abbildungsmatrix A rechts steht?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#### Übung 12

Betrachtet werden zwei affine Abbildung im  $\mathbb{R}^3$ : Mit der ersten werden Raumobjekte orthogonal in die x-y-Ebene projiziert. Mit der zweiten werden Raumobjekte am Ursprung gespiegelt.

- Geben Sie die Abbildungsmatrix A der ersten Abbildung und die Abbildungsmatrizen B der zweiten Abbildung an.
- Welches Bild der Strecke  $\overline{PQ}$  mit  $P(2|4|2)$  und  $Q(4|2|6)$  ergibt sich, wenn zunächst die erste Abbildung und anschließend auf deren Ergebnis die zweite Abbildung angewendet wird?

### F. Die Umkehrabbildung einer affinen Abbildung

Existiert zur Abbildungsmatrix  $A$  die inverse Matrix  $A^{-1}$ , dann gelten folgende Umformungen:

$$\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v} \Leftrightarrow A \cdot \vec{p} = \vec{p}' - \vec{v} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{p} = A^{-1} \cdot (\vec{p}' - \vec{v}) \Leftrightarrow E \cdot \vec{p} = A^{-1} \cdot (\vec{p}' - \vec{v}),$$

wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist. Wegen  $E \cdot \vec{p} = \vec{p}$  folgt schließlich:  $\boxed{\vec{p} = A^{-1} \cdot (\vec{p}' - \vec{v})}$

#### Satz IV.1: Umkehrbarkeit einer affinen Abbildung

Die affine Abbildung  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}$  ist umkehrbar, wenn die Inverse  $A^{-1}$  existiert.

Eine umkehrbare affine Abbildung heißt *Affinität*. Im  $\mathbb{R}^2$  gibt es dafür ein einfaches Kriterium:

#### Satz IV.2: Umkehrabbildung einer affinen Abbildung im $\mathbb{R}^2$

Ist  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  die Abbildungsmatrix einer affinen Abbildung und gilt  $ad - bc \neq 0$ , dann existiert die Inverse  $A^{-1}$  und es gilt:  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beweis:

Wir berechnen das Matrizenprodukt  $A^{-1} \cdot A$ :

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ ac-ac & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Die obige Rechnung zeigt, dass das Ergebnis dieser Multiplikation exakt die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix ergibt. Damit ist der Satz IV.2 bewiesen.

### Übung 13 Ergänzung zum Satz IV.2

Zeigen Sie: Wendet man  $A$  auf den Punkt  $P(x|y)$  an, so erhält man  $P'(ax+by|cx+dy)$ . Wendet man nun  $A^{-1}$  auf den Punkt  $P'(ax+by|cx+dy)$  an, so erhält man wieder den Punkt  $P(x|y)$ .

Mit Satz IV.2 kann man die Umkehrabbildung einer affinen Abbildung im  $\mathbb{R}^2$  bestimmen.

#### Beispiel: Umkehrabbildung

Gegeben ist die affine Abbildung  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Welcher Punkt  $P(x|y)$  wird durch diese Abbildung auf den Punkt  $P'(9|5)$  abgebildet?

Lösung:

Wir subtrahieren zuerst den Verschiebungsvektor vom Ortsvektor des Punktes  $P'$ . Nun müssen wir nur noch das Ergebnis von links mit der Inversen  $A^{-1}$  der Abbildungsmatrix  $A$  multiplizieren, die wir vorher berechnet haben.

Als Ergebnis erhalten wir, dass der Punkt  $P(1,5|0)$  auf  $P'(9|5)$  abgebildet wird.

#### Berechnung von $P$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left( \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Übung 14 Umkehrabbildung einer affinen Abbildung im $\mathbb{R}^2$

a) Zeigen Sie, dass  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  die Inverse  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  besitzt.

b) Welcher Punkt  $P$  wird durch die Affinität  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  auf  $P'(3|3)$  abgebildet?

### G. Geometrische Deutung einer affinen Abbildung

Das kartesische Koordinatensystem hat als Basiselemente die Vektoren  $\overrightarrow{OP}$  und  $\overrightarrow{OQ}$  mit  $P(0|1)$  und  $Q(1|0)$ .

Das bedeutet: Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $R(x|y)$  der Ebene lässt sich darstellen durch  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

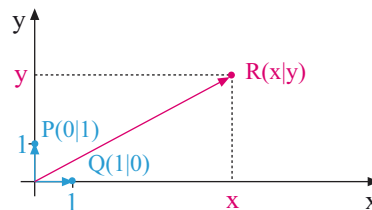
Nun ermitteln wir die Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  dieser Basispunkte  $P$  und  $Q$  bei Anwendung einer affinen Abbildung *ohne Verschiebung*.

Die nebenstehende Rechnung zeigt, dass die beiden *Spaltenvektoren* der affinen Abbildungsmatrix  $A$  exakt den Ortsvektoren der Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  der Basis entsprechen. Die Ortsvektoren der Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  bilden daher die Basis eines neuen, affinen Koordinatensystems.

Damit sind wir in der Lage, die Bildpunkte einer affinen Abbildung zeichnerisch zu bestimmen.

Beispielsweise erhält man das Bild des Punktes  $R(2|2)$ , indem man die Spaltenvektoren der Matrix  $A$  – also  $\overrightarrow{OP'}$  und  $\overrightarrow{OQ'}$  – mit 2 multipliziert und anschließend addiert.

Die Rechnung ergibt ebenfalls den Bildpunkt  $R'(4|6)$  im ursprünglichen kartesischen Koordinatensystem.



**Ortsvektoren von  $P$  und  $Q$ :**

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Matrix der affinen Abbildung:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Ortsvektoren der Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$ :**

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

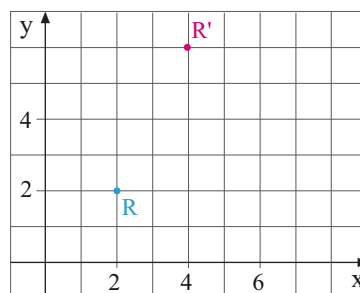
$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



### Übung 15 Bestimmung eines Bildpunktes durch Zeichnung und Rechnung

Gegeben sind die Basispunkte  $P(0|1)$  und  $Q(1|0)$  eines kartesischen Koordinatensystems.

- Bestimmen Sie die Bildpunkte  $P'$  und  $Q'$  bei Abbildung mit der affinen Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .
- Skizzieren Sie das durch die neue Basis  $\overrightarrow{OP'}$  und  $\overrightarrow{OQ'}$  definierte affine Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch den Bildpunkt  $P'$  des Punktes  $P(4|-1)$ .

### H. Verkettung zweier affiner Abbildungen

Die Verkettung bzw. Hintereinanderausführung zweier affiner Abbildungen mit den Abbildungsmatrizen A bzw. B kann ersetzt werden durch eine einzige Abbildung, welche durch das Matrizenprodukt  $C = B \cdot A$  als Abbildungsmatrix definiert ist. Bei der Multiplikation muss allerdings die Reihenfolge strikt beachtet werden, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

#### Beispiel: Verkettung

Der Punkt  $P(2|1)$  wird mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  auf den Punkt  $P'(x'|y')$  abgebildet.

Danach wird  $P'$  mit der Matrix  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  auf den Punkt  $P''(x''|y'')$  abgebildet.

- Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $P'$  und  $P''$ .
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $P''$  direkt aus denen des Punktes P.

Lösung zu a):

Wir berechnen  $P'$ , indem wir den Ortsvektor von  $P(2|1)$  von links mit der Matrix A multiplizieren. Resultat:  $P'(3|5)$ .

**Berechnung von  $P'(x'|y')$ :**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Danach wird der Ortsvektor von  $P'$  von links mit der Matrix B multipliziert. Das Ergebnis lautet nun:  $P''(-1|-1)$ .

**Berechnung von  $P''(x''|y'')$ :**

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu b):

Wir berechnen zuerst das Matrizenprodukt  $C = B \cdot A$ .

**Matrizenprodukt:**

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Anschließend wird der Ortsvektor von P von links mit C multipliziert. Als Ergebnis ergibt sich wieder  $P''(-1|-1)$ .

**Direkte Berechnung von  $P''$ :**

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#### Übung 16 Verkettung

- Der Punkt  $P(3|2)$  wird mit der Matrix A auf den Punkt  $P'$  abgebildet.  $P'$  wird anschließend mit der Matrix B auf  $P''$  abgebildet. Bestimmen Sie  $P''$  auf zwei verschiedene Arten.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Ein Punkt  $P(x|y)$  wird zuerst mit der Matrix A auf den Punkt  $P'(x'|y')$  abgebildet. Danach wird  $P'(x'|y')$  mit der Matrix B auf den Punkt  $P''(x''|y'')$  abgebildet. Begründen Sie, dass mit der Matrix  $A^{-1} \cdot B^{-1}$  der Punkt  $P''(x''|y'')$  auf den Ausgangspunkt P abgebildet wird.

#### Übung 17 Abbildung mit Drehung

- Die Punkte  $P(1|3)$  und  $Q(3|2)$  werden zuerst mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  auf die Punkte  $P'$  bzw.  $Q'$  abgebildet. Danach wird die Strecke  $\overline{P'Q'}$  um  $135^\circ$  gedreht. Das Drehzentrum ist der Ursprung. Welche Strecke  $\overline{P''Q''}$  erhält man als Endergebnis?
- Wie lautet das Endergebnis, wenn die Strecke  $\overline{PQ}$  zuerst um  $135^\circ$  gedreht wird und danach das Ergebnis  $\overline{P'Q'}$  der Drehung mit der Matrix A aus Teil a) abgebildet wird?

## Übungen

### 18. Abbildungsmatrix ermitteln

Bei einer affinen Abbildung wird die x-Achse auf sich selbst abgebildet und der Punkt  $P(1|3)$  auf den Punkt  $P'(2|1)$ . Wie lautet die Abbildungsmatrix der affinen Abbildung?

### 19. Bildpunkte geometrisch bestimmen

Eine affine Abbildung bildet  $P(0|0)$  auf  $P'(1|-2)$ ,  $Q(1|0)$  auf  $Q'(2|2)$  und  $R(0|1)$  auf  $R'(-1|0)$  ab.

- Zeichnen Sie das Gitter, auf das das kartesische Koordinatensystem abgebildet wird.
- Ermitteln Sie zeichnerisch die Bildpunkte von  $A(-1|-2)$ ,  $B(1|-2)$ ,  $C(2|1)$ ,  $D(-3|2)$ .
- Wie lauten die Abbildungsgleichungen der affinen Abbildung?

Geben Sie auch die Abbildungsmatrix  $A$  und den Verschiebungsvektor  $\vec{v}$  an.

### 20. Abbildungsmatrix bestimmen

Bei einer affinen Abbildung ohne Verschiebung wird der Punkt  $P(3|2)$  auf  $P'(-1|0)$  und Punkt  $Q(5|3)$  auf  $Q'(1|-2)$  abgebildet.

- Wie lautet die Abbildungsmatrix dieser affinen Abbildung?
- Welcher Punkt  $R$  wird auf  $R'(12|4)$  abgebildet?

### 21. Kriterium für Affinität

Für welche Werte des Parameters  $a$  gehört die Matrix  $A$  zu einer Affinität?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 3 \\ a & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3 & a \end{pmatrix}$

### 22. Verkettung von Abbildungen

Punkt  $P$  wird mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  auf  $P'$  abgebildet.

Anschließend wird  $P'$  mit der Matrix  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$  auf  $P''$  abgebildet.

Ermitteln Sie die Koordinaten von  $P''$  direkt aus den Koordinaten von  $P$ .

- $P(1|3)$
- $P(-4|2)$
- $P(3|-5)$
- $P(-1|-4)$

### 23. Vertauschung der Reihenfolge von Abbildungen

Wie lauten die Koordinaten des Punktes  $P''$ , wenn in Übung 22 Punkt  $P$  zuerst mit der Matrix  $B$  und der sich ergebende Bildpunkt anschließend mit der Matrix  $A$  abgebildet wird?

### 24. Umkehrabbildung

Wie lautet die Umkehrabbildung der Affinität  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

### 25. Abbildungsart feststellen

Von einer affinen Abbildung sind die Abbildungsgleichungen bekannt. Geben Sie an, welche Art von Abbildung vorliegt.

- $x' = x - 2$   
 $y' = y$
- $x' = -2x$   
 $y' = -2y$
- $x' = -y$   
 $y' = -x$
- $x' = x - 4$   
 $y' = y + 6$

### 26. Abbildungen im $\mathbb{R}^3$

Untersuchen Sie die geometrische Wirkung der Abbildungsmatrizen  $A$  und  $B$ . Welche geometrische Wirkung besitzt  $C = A \cdot B$ ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. Eigenschaften affiner Abbildungen

#### A. Geradentreue und Teilverhältnistreue

Eine affine Abbildung hat mehrere charakteristische Eigenschaften, z. B. die **Geradentreue**: Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade. Wir vollziehen dies an einem Beispiel nach.

##### Beispiel: Geradentreue

- a) Weisen Sie nach, dass die Punkte  $P(0|1)$ ,  $Q(1|2)$  und  $R(3|4)$  auf einer Geraden liegen.  
 b) Zeigen Sie, dass die drei Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$  bei Abbildung mit der Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ebenfalls auf einer Geraden liegen.

Lösung zu a):

Die Vektoren  $\vec{PQ}$  und  $\vec{PR}$  haben nicht den gleichen Betrag, aber die gleiche Richtung, da sie kollinear sind, denn es gilt:

$$\vec{PR} = 3 \cdot \vec{PQ}.$$

Daher liegen P, Q und R auf einer Geraden.

Lösung zu b):

Zuerst berechnen wir die Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$ , indem wir die Ortsvektoren  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OQ}$  und  $\vec{OR}$  von links mit der Abbildungsmatrix A multiplizieren.

Dann zeigen wir, dass die Vektoren  $\vec{P'Q'}$  und  $\vec{P'R'}$  ebenfalls kollinear sind. Daraus folgt, dass die Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$  ebenfalls auf einer Geraden liegen.

Aus obigem Beispiel kann eine weitere Eigenschaft affiner Abbildungen abgelesen werden, nämlich die **Teilverhältnistreue**. Der Punkt Q teilt die Strecke  $\overline{PR}$  im Verhältnis 1 : 2. In exakt demselben Verhältnis teilt der Bildpunkt  $Q'$  die Bildstrecke  $\overline{P'R'}$ .

Man kann dies verallgemeinern:

Bestehende Teilverhältnisse werden durch affine Abbildungen nicht verändert.

#### Übung 1 Geradentreue

Wählen Sie einen Punkt Q auf der Strecke  $\overline{PR}$  mit  $P(-3|2)$  und  $R(6|-1)$ . Berechnen Sie dann die Bilder  $P'$  und  $R'$  bei der Abbildung mit der Matrix A. Zeigen Sie, dass der Bildpunkt  $Q'$  auf der Strecke  $\overline{P'R'}$  liegt.

##### Kollinearität von $\vec{PQ}$ und $\vec{PR}$ :

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{PR} = 3 \cdot \vec{PQ}$$

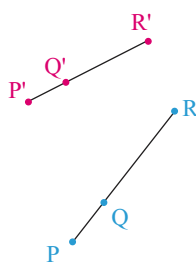
##### Bildpunkte von P, Q und R:

$$A \cdot \vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-1|-1)$$

Analog ergeben sich  $Q'(0|-2)$ ,  $R'(2|-4)$ .

##### Kollinearität von $\vec{P'Q'}$ und $\vec{P'R'}$ :

$$\vec{P'Q'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P'R'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{P'Q'}$$



##### Geradentreue:

Das Bild der Geraden durch P und Q ist die Gerade durch  $P'$  und  $Q'$ .

##### Teilverhältnistreue:

$$|\vec{PQ}| : |\vec{QR}| = 1 : 2$$

$$|\vec{P'Q'}| : |\vec{Q'R'}| = 1 : 2$$

**Übung 2 Geradentreue und Teilverhältnistreue**

Die Punkte  $P(-1|3)$ ,  $Q(1|-1)$  und ein Punkt  $R$  werden mit der Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  auf die Punkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$  abgebildet.

- $Q$  teilt die Strecke  $\overline{PR}$  im Verhältnis  $1 : 3$ . Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $R$ .
- Bestimmen Sie die Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$ .
- Zeigen Sie, dass  $P'$ ,  $Q'$  und  $R'$  auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie weiter, dass der Punkt  $Q'$  die Strecke  $\overline{P'R'}$  im Verhältnis  $1 : 3$  teilt.

**B. Paralleltreue**

Affine Abbildungen sind paralleltreue. *Paralleltreue* bedeutet, dass bei affinen Abbildungen parallele Geraden auf wiederum parallele Bildgeraden abgebildet werden.

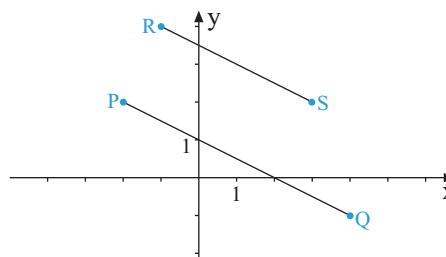
**Beispiel: Paralleltreue**

Gegeben sind die Punkte  $P(-2|2)$ ,  $Q(4|-1)$ ,  $R(-1|4)$  und  $S(3|2)$ .

Die Geraden  $PQ$  und  $RS$  sind parallel.

Berechnen Sie die Bildpunkte der vier gegebenen Punkte bei der Abbildung mit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ .

Weisen Sie nach, dass die Geraden  $P'Q'$  und  $R'S'$  ebenfalls parallel sind.



Lösung:

Zuerst werden die Bildpunkte  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  und  $S'$  von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $S$  ermittelt.

Danach ist zu zeigen, dass die Richtungsvektoren  $\overrightarrow{P'Q'}$  und  $\overrightarrow{R'S'}$  kollinear sind.

Dann ist auch die dritte Eigenschaft affiner Abbildungen exemplarisch belegt.

**Bildpunkte von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $S$ :**

$$P'(8|-14), \quad Q'(-7|13), \\ R'(13|-22), \quad S'(3|-4)$$

**Richtungsvektoren der Bildgeraden:**

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} -15 \\ 27 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{R'S'} = \begin{pmatrix} -10 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{P'Q'}$$

**Übung 3 Parallele Geraden**

Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte  $P(-1|-2)$  und  $Q(5|1)$ . Die zu  $g$  parallele Gerade  $h$  enthält den Punkt  $R(-2|3)$ .

Berechnen Sie einen zweiten Punkt  $S$  der Geraden  $h$ . Weisen Sie nach, dass die Bilder der Geraden  $g$  und  $h$  bei der Abbildung mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  parallel sind.

Damit haben wir exemplarisch drei wichtige Eigenschaften affiner Abbildungen gefunden, die nebenstehend noch einmal zusammengefasst aufgeführt sind:

- die **Geradentreue**,
- die **Teilverhältnistreue**,
- die **Paralleltreue**.

**Eigenschaften affiner Abbildungen**

Das Bild einer Geraden ist eine Gerade. Ein Teilverhältnis wird durch eine affine Abbildung nicht verändert. Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.

## 4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir zeigen im Folgenden anhand eines Beispiels, wie man die geometrische Wirkung einer linearen Abbildung mit Hilfe sogenannter Eigenvektoren erschließen kann.

Als **Eigenvektor** einer Abbildungsmatrix  $A$  bezeichnet man jeden Vektor  $\vec{p} \neq \vec{0}$ , der auf einen kollinearen Vektor abgebildet wird.

Es gibt also einen Parameterwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sodass  $\vec{p}' = \lambda \cdot \vec{p}$ , d. h.  $A \cdot \vec{p} = \lambda \cdot \vec{p}$  gilt. Der Parameterwert  $\lambda$  gibt den Streckfaktor beim Übergang von  $\vec{p}$  zum Bild  $\vec{p}'$  an. Er wird als **Eigenwert** der Matrix  $A$  bezeichnet.

### Bestimmungsgleichung für Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A \cdot \vec{p} = \lambda \cdot \vec{p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Eigenvektoren** von  $A$ :  
Lösungen  $\vec{p} \neq \vec{0}$  der obigen Gleichung

**Eigenwerte** von  $A$ :  
zugehörige Parameterwerte  $\lambda$

#### Beispiel: Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben sei eine Affine Abbildung mit der Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  Eigenvektoren von  $A$  sind.

Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ?

Welche geometrische Wirkung besitzt die Abbildung?

Lösung:

Die Bilder der beiden Vektoren  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  sind  $2\vec{p}_1$  bzw.  $-\vec{p}_2$ . Es handelt sich also tatsächlich um Eigenvektoren. Die zugehörigen Eigenwerte (Streckfaktoren) sind  $\lambda_1 = 2$  bzw.  $\lambda_2 = -1$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \vec{p}_1 = 2 \cdot \vec{p}_1$$

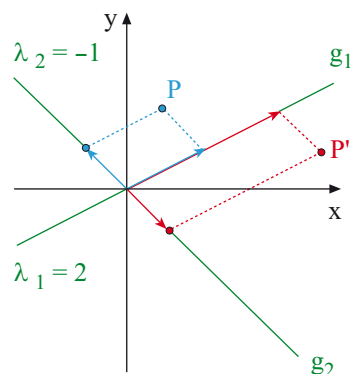
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \vec{p}_2 = (-1) \cdot \vec{p}_2$$

Die geometrische Wirkung der Abbildung lässt sich gut beurteilen, wenn man zwei Ursprungsgeraden betrachtet, deren Richtungsvektoren die beiden Eigenvektoren der Abbildungsmatrix  $A$  sind:

$$g_1: \vec{p} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{p} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung bewirkt nämlich längs der Geraden  $g_1$  eine Streckung mit dem Faktor  $\lambda_1 = 2$  und längs der Geraden  $g_2$  eine Streckung mit dem Faktor  $\lambda_2 = -1$ .

Durch Einzeichnen dieser Geraden lässt sich dann zu einem gegebenen Punkt  $P$  der zugehörige Bildpunkt  $P'$  wie rechts dargestellt leicht konstruieren.



Im obigen Beispiel waren die Eigenvektoren vorgegeben. Es stellt sich also noch die Frage, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann.

Angenommen, eine affine Abbildungsmatrix  $A$  hat einen Eigenwert  $\lambda$  und einen dazugehörigen Eigenvektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , welcher nicht der Nullvektor ist.

Die nebenstehende Umformung zeigt, dass neben dem Nullvektor  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  auch der Eigenvektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

auf den Nullvektor abgebildet wird.

Da zwei Vektoren auf denselben Vektor abgebildet werden, ist die Abbildung mit der Matrix  $B$  nicht umkehrbar. Die Matrix  $B$  hat also *keine* inverse Matrix.

Da die Matrix  $B$  keine Inverse besitzt, gilt (vgl. Seite 130):

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Man bezeichnet diese Gleichung als die **charakteristische Gleichung** der affinen Abbildung.

Die charakteristische Gleichung kann als quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben. Diese Lösungen sind die Eigenwerte der Matrix  $A$ .

**Abbildungsmatrix:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Eigenschaft eines Eigenvektors:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Umformung der Gleichung:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Quadratische Gleichung:**

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

#### Charakteristische Gleichung einer affinen Abbildung

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind die **Eigenwerte** der affinen Abbildung.

#### ► Beispiel: Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der affinen Abbildung mit der Abbildungsmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Lösung:

Die charakteristische Gleichung dieser Abbildung lautet  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ .

Sie hat die Lösungen  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$ .

Dies sind die Eigenwerte der Abbildung.

▼ Nun müssen noch die zugehörigen Eigenvektoren ermittelt werden.

**Charakteristische Gleichung:**

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

**Lösungen der Gleichung:**

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Mit dem Eigenwert  $\lambda = 2$  wird ein zugehöriger Eigenvektor  $\vec{p}$  auf den Vektor  $2\vec{p}$  abgebildet.

Wie rechts dargestellt, ergeben die Eigenvektoren zu  $\lambda = 2$  alle Vektoren der Gestalt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d. h. alle zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  kollinearen Vektoren.

Analog ergeben sich als Eigenvektoren zu  $\lambda = 3$  alle Vektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Man kann diese beiden Scharen von Eigenvektoren auch als Ursprungsgeraden durch den Punkt  $P(1|-1)$  für  $\lambda = 2$  bzw. durch den Punkt  $Q(1|-2)$  für  $\lambda = 3$  interpretieren.

#### Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I: } x - y = 2x \\ \text{II: } 2x + 4y = 2y \end{cases}$$

#### Lösungen:

$$\text{I: } y = -x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II: } 2y = -2x$$

#### Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I: } x - y = 3x \\ \text{II: } 2x + 4y = 3y \end{cases}$$

#### Lösungen:

$$\text{I: } y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{II: } y = -2x$$

### Übung 1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der affinen Abbildung mit der Matrix A.

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

d)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

### Übung 2 Spiegelung und Drehung

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für die

- Spiegelung an der x-Achse,
- Drehung um den Ursprung um  $90^\circ$ .

### Übung 3 Abbildungsmatrix ermitteln

Geben sie eine affine Abbildungsmatrix A an, welche die angegebenen Eigenwerte besitzt.

a)  $\lambda = 2$  und  $\lambda = -4$

b)  $\lambda = 5$

### Übung 4 Abbildungsmatrix und Eigenvektoren bestimmen

Bei einer affinen Abbildung wird der Punkt  $P(1|1)$  auf  $P'(2|6)$  und der Punkt  $Q(4|-3)$  auf  $Q'(1|3)$  abgebildet.

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser affinen Abbildung.
- Welche Eigenwerte hat die Matrix A?
- Berechnen sie die zugehörigen Eigenvektoren.

## Überblick

### Affine Abbildung

Eine Abbildung, die jedem Punkt

$P(x|y)$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  |  $P(x|y|z)$  des Raumes  $\mathbb{R}^3$

durch die nachfolgenden **Abbildungsgleichungen** bzw. die **Matrix-Vektor-Darstellung** einen Bildpunkt

$P'(x|y)$  des  $\mathbb{R}^2$  |  $P'(x|y|z)$  des  $\mathbb{R}^3$

zuordnet, heißt **affine Abbildung**.

### Abbildungsgleichungen einer affinen Abbildung

$$\begin{array}{l} \dots \text{ im } \mathbb{R}^2: \\ x' = a \cdot x + b \cdot y + v_1 \\ y' = c \cdot x + d \cdot y + v_2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \dots \text{ im } \mathbb{R}^3: \\ x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + v_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + v_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + v_3 \end{array} \right.$$

### Matrix-Vektor-Darstellung einer affinen Abbildung

$$\dots \text{ im } \mathbb{R}^2: \quad \left( \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \dots \text{ im } \mathbb{R}^3: \quad \left( \begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise mit Abbildungsmatrix A:  $\boxed{\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}}$

### Inverse Abbildung, Affinität

Existiert die Inverse  $A^{-1}$  der Matrix A, so ist die affine Abbildung  $\vec{p}' = A \cdot \vec{p} + \vec{v}$  **umkehrbar** und heißt **Affinität**.

Für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $ad - bc \neq 0$  gilt:  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

### Verkettung

Die **Verkettung** bzw. Hintereinanderausführung zweier affiner Abbildungen mit den Abbildungsmatrizen A und B kann ersetzt werden durch eine einzige Abbildung, welche durch das Matrizenprodukt  $C = B \cdot A$  definiert wird. Bei der Multiplikation muss die Reihenfolge strikt beachtet werden, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

### Eigenschaften affiner Abbildungen

Eine affine Abbildung ist

1. **geradentreu**: Eine Gerade wird wieder auf eine Gerade abgebildet.
2. **teilverhältnistreu**: Ein Teilverhältnis wird durch eine affine Abbildung nicht verändert.
3. **paralleltreue**: Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.

### Charakteristische Gleichung

$$\dots \text{ im } \mathbb{R}^2: \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

### Eigenwerte

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung heißen **Eigenwerte** der affinen Abbildungsmatrix.

### Eigenvektoren

Vektoren  $\vec{p}$  mit der Eigenschaft  $\vec{p}' = \lambda \vec{p}$  heißen **Eigenvektoren** zum Eigenwert  $\lambda$ .

## Test

### Affine Abbildungen

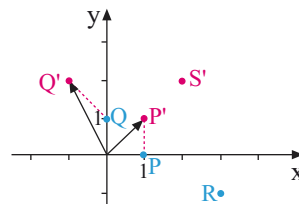
#### 1. Spezielle affine Abbildungen

- a) Der Punkt  $P(1|3)$  wird an der  $y$ -Achse gespiegelt.  $P'$  sei der so erzeugte Bildpunkt. Dieser wird anschließend durch eine  $90^\circ$ -Drehung auf den Punkt  $P''$  abgebildet. Ermitteln Sie die Koordinaten von  $P''$  zunächst zeichnerisch und dann auch rechnerisch. Bestimmen Sie bei der rechnerische Lösung zunächst die Abbildungsmatrizen der beiden beteiligten Abbildungen.
- b) Bei einer Scherung mit der  $x$ -Achse als Scherachse wird  $Q(2|2)$  auf  $Q'(4|2)$  abgebildet. Wie groß ist der Scherwinkel  $\alpha$ ?

#### 2. Zeichnerische Bestimmung von Punkten

Bei einer affinen Abbildung ohne Verschiebung werden  $P(1|0)$  auf  $P'(1|1)$  und  $Q(0|1)$  auf  $Q'(-1|2)$  abgebildet.

- a) Auf welchen Bildpunkt  $R'$  wird der Punkt  $R(3|-1)$  abgebildet?
- b) Welcher Punkt  $S$  wird auf den Bildpunkt  $S'(2|2)$  abgebildet?



#### 3. Verkettung von Matrizen / inverse Matrix

$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  sind die Abbildungsmatrizen zweier affiner Abbildungen.

- a) Berechnen Sie das Matrizenprodukt  $A \cdot B$ . Folgern Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Matrizen  $A$  und  $B$  besteht.
- b) Auf welchen Bildpunkt  $P'$  bildet die Matrix  $A$  den Punkt  $P(-4|3)$  ab?
- c) Welcher Punkt  $Q$  wird mit der Matrix  $A$  auf den Bildpunkt  $Q'(12|-8)$  abgebildet?

#### 4. Bestimmung einer Abbildungsmatrix

Bei einer affinen Abbildung wird der Punkt  $P(-2|3)$  auf den Bildpunkt  $P'(-1|-9)$  und der Punkt  $Q(1|4)$  auf den Bildpunkt  $Q'(6|-1)$  abgebildet.

Bestimmen Sie die zu dieser Abbildung gehörende Abbildungsmatrix  $A$ .

#### 5. Eigenwerte und Eigenvektoren

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$