

Probeklausur

Lineare Algebra II

Aufgabenpaket 1: Eigenschaften von Matrizen

Gegeben sei folgende Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1.1 Berechnen Sie die Eigenwerte von A . Welche algebraischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?
- 1.2 Begründen Sie durch eine Rechnung, dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.
- 1.3 Wie lautet die Jordan-Normalform von A ? Begründen Sie!
- 1.4 Wie lautet das Minimalpolynom von A ? Begründen Sie!
- 1.5 Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie anhand der Eigenwerte!
- 1.6 Wie lautet die allgemeine Lösung des linear Gleichungssystems $Ax = b$, wobei die rechte Seite b ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 sein soll?
- 1.7 Stellt die Matrix A eine volumentreue lineare Abbildung dar? Begründen Sie!
- 1.8 Stellt die Matrix A eine orientierungserhaltende lineare Abbildung dar? Begründen Sie!

Aufgabenpaket 2: Konstruierbarkeit von Matrizen

- 2.1 Kann es eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ geben, die eine Rotation im vierdimensionalen Raum darstellt, deren Rotationsachse jedoch nicht im \mathbb{R}^4 liegt? Begründen Sie Ihre Aussage!
- 2.2 Können Sie die *-Elemente in der folgenden Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ * & 1 & -1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

so durch reelle Zahlen ergänzen, dass $x^\top B y$ ein Skalarprodukt für $x, y \in \mathbb{R}^3$ definiert? Begründen Sie!

Aufgabenpaket 3: Endliche Körper

Eine lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^n$ über einem endlichen Körper K mit $n \in \mathbb{N}$ habe keine Eigenwerte in K . Zeigen Sie, dass diese Abbildung nicht nilpotent ist! (Tipp: Begründen Sie über das Minimalpolynom).

Aufgabenpaket 4: Gram-Schmidt-Verfahren

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

im Raum \mathbb{C}^3 .

- 4.1 Berechnen Sie eine bezüglich des Standardskalarproduktes x^*y orthonormale Basis des Untervektorraumes, der von v_1 und v_2 aufgespannt wird!
- 4.2 Berechnen Sie die Matrix $\Pi \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, die die orthogonale Projektion auf diesen Unterraum darstellt!