

Musterlösung zur Klausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Setzen Sie in jeder Zeile genau ein Kreuz. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 0,5 Punkte, für jede falsche 0 Punkte. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

	wahr	falsch
Sei K ein Körper und seien $f, g \in K[T]$. Dann gilt $\text{Grad}(f + g) = \text{Grad}(f - g)$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Jeder Körper besitzt genau zwei Ideale.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt Primelemente, die nicht irreduzibel sind.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b \in R$. Dann gilt $(a) \cap (b) = (ab)$.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Es gibt Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, die keine Eigenwerte besitzen.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Seien $A, B \in K^{n \times n}$ und sei λ eine Nullstelle von χ_A . Dann ist λ auch ein Nullstelle von χ_{AB} .	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sei U ein Untervektorraum eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V . Die orthogonale Projektion $p_U: V \rightarrow V$ ist selbstadjungiert.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums. Ist f diagonalisierbar, so auch f^* .	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Geben Sie das richtige Ergebnis an. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

- a) Zerlegen Sie $T^4 + 3T^2 + 2 \in \mathbb{R}[T]$ und $T^3 + T^2 + T + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T]$ in Primfaktoren.

in $\mathbb{R}[T]$: $T^4 + 3T^2 + 2 = (T^2 + 1) \cdot (T^2 + 2)$ (0,5 P.)

in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T]$: $T^3 + T^2 + T + 1 = (T + 1)^3$ (0,5 P.)

- b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und alle

Eigenwerte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & -4 \\ -6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

$\chi_A = T^3 - 2T^2 + T = (T - 1)^2 \cdot T$ (1 P.)

$p_A = T^3 - 2T^2 + T = (T - 1)^2 \cdot T$ (0,5 P.)

Eigenwerte von A : 0 und 1 (0,5 P.)

- c) Sei $B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ eine Matrix mit $\chi_B = (T - 1)^2 \cdot (T + 2)^2$ und $p_B = (T - 1) \cdot (T + 2)^2$.
Geben Sie die Jordansche Normalform von B an:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (1 P.)

- d) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt.
Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $b_1 = (0, 0, -1), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (1, 0, 0)$ an.

$e_1 = (0, 0, -1)$

$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ (0,5 P.)

$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ (0,5 P.)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer \mathbb{C} -Vektorraum und $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

- a) Zeigen Sie: Falls $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f = g \circ g^*$ existiert, gilt:
- i) f ist selbstadjungiert. (0,5 P.)
 - ii) f ist diagonalisierbar. (0,5 P.)
 - iii) $\langle f(v), v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ für alle $v \in V$. (0,5 P.)
 - iv) Die Eigenwerte von f sind nicht-negative reelle Zahlen. (0,5 P.)
- b) Zeigen Sie: Falls f selbstadjungiert ist und alle Eigenwerte von f nicht-negative reelle Zahlen sind, existiert $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $g^* = g$ und $f = g \circ g$. (1 P.)
- c) Sei nun $V := \mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalarprodukt und $f(x, y) := (x + 2y, 2x + y)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f = g \circ g^*$. (1 P.)

Lösung:

- a) i) $f^* = (g \circ g^*)^* = (g^*)^* \circ g^* = g \circ g^* = f$. (0,5 P.)
- ii) Laut Spektralsatz besitzen selbstadjungierte Endomorphismen eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Somit ist f diagonalisierbar. (0,5 P.)
- iii) $\langle f(v), v \rangle = \langle g \circ g^*(v), v \rangle = \langle g^*(v), g^*(v) \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. (0,5 P.)
- iv) Sei v ein Eigenvektor von f mit Eigenwert λ .
Aus $\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle \lambda \cdot v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ folgt $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. (0,5 P.)
- b) Aus dem Spektralsatz folgt die Existenz einer Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren von f . Die zugehörige Matrix $A_{f,B,B}$ ist eine Diagonalmatrix. Die Einträge auf der Diagonalen sind Eigenwerte von f und somit nicht-negative reelle Zahlen. Sei D die Diagonalmatrix, die als Einträge die Quadratwurzeln der Einträge der Matrix $A_{f,B,B}$ hat. Dann gilt $D^* = D$ und $A_{f,B,B} = D^2$. Sei nun $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ der Endomorphismus mit $A_{g,B,B} = D$. Dann gilt $g^* = g$ und $f = g \circ g$ (1 P.)
- c) -1 ist ein Eigenwert von f , denn $f(1, -1) = (-1, 1) = -(1, -1)$. Wegen Aufgabenteil a) iv) existiert kein $g \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f = g \circ g^*$. (1 P.)

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Beweisen Sie:

a) Ist λ ein Eigenwert von f , so gilt $\lambda \in \{0, 1\}$. (1 P.)

b) f ist diagonalisierbar. (1 P.)

Lösung:

a) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von f mit zugehörigem Eigenwert $\lambda \in K$. Dann folgt

$$\lambda^2 \cdot v = \lambda \cdot f(v) = f(\lambda \cdot v) = f \circ f(v) = f(v) = \lambda \cdot v,$$

also $\lambda^2 = \lambda$. Dies impliziert $\lambda \in \{0, 1\}$. (1 P.)

b) Wegen $f \circ f - f = 0$ ist das Minimalpolynom $p_f \in K[T]$ ein Teiler von $T^2 - T = T \cdot (T - 1)$. Somit zerfällt das Minimalpolynom in Linearfaktoren und die Jordansche Normalform von f existiert. Da kein Primteiler im Minimalpolynom mehrfach vorkommt, gibt es in der Jordanschen Normalform nur Jordankasten der Größe 1. Daher ist die Jordansche Normalform eine Diagonalmatrix. (1 P.)

Aufgabe 5 (2 Punkte):

a) Sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$. Beweisen Sie, dass die Minimalpolynome p_{AB} und p_{BA} übereinstimmen, falls A invertierbar ist. (1 P.)

b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass man bei obiger Aussage nicht auf die Voraussetzung, dass A invertierbar ist, verzichten kann. (1 P.)
(Tipp: Wählen Sie zum Beispiel $K := \mathbb{R}$ und $n := 2$)

Lösung:

a) Für jedes Polynom $q \in K[T]$ gilt $q(AB)A = Aq(BA)$. Da A invertierbar ist, erhalten wir die Äquivalenz

$$q(AB) = 0 \iff q(BA) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Minimalpolynome von AB und BA übereinstimmen. (1 P.)

b) Gegenbeispiel: Für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

erhalten wir

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $p_{AB} = T^2 \neq T = p_{BA}$. (1 P.)

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) := \{x \in R \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } x^n \in \mathfrak{a}\}$$

ebenfalls ein Ideal ist.

Lösung:

- $\text{rad}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ wegen $0 \in \mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a})$. (0,5 P.)
- Seien $x_1, x_2 \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x_1^{n_1}, x_2^{n_2} \in \mathfrak{a}$. Wir betrachten das Produkt $(x_1 - x_2)^{n_1 + n_2}$. Beim Ausmultiplizieren ergibt sich eine Summe, deren Summanden die Form $x_1^k \cdot (-x_2)^m$ mit $k, m \in \mathbb{N}$ und $k + m = n_1 + n_2$ haben. Wegen $k + m = n_1 + n_2$ gilt $k \geq n_1$ oder $m \geq n_2$. Somit erhalten wir $x_1^k \in \mathfrak{a}$ oder $(-x_2)^m \in \mathfrak{a}$, also $x_1^k \cdot (-x_2)^m \in \mathfrak{a}$. Es folgt $(x_1 - x_2)^{n_1 + n_2} \in \mathfrak{a}$ und schließlich $x_1 - x_2 \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. (1 P.)
- Seien $r \in R, x \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x^n \in \mathfrak{a}$. Wegen $(r \cdot x)^n = r^n \cdot x^n \in \mathfrak{a}$ folgt $r \cdot x \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. (0,5 P.)

Benotung der Klausur:

Die Klausur ist **bestanden**, falls insgesamt mindestens 7,5 Punkte und bei den Aufgaben 3 bis 6 zusammen mindestens 3 Punkte erreicht wurden. Bei bestandener Klausur wird die Note gemäß folgender Tabelle festgelegt:

Punkte	Note
17,5 - 20	1,0 (sehr gut)
16,5 - 17	1,3 (sehr gut -)
15,5 - 16	1,7 (gut +)
14,5 - 15	2,0 (gut)
13,5 - 14	2,3 (gut -)
12,5 - 13	2,7 (befriedigend +)
11,5 - 12	3,0 (befriedigend)
10,5 - 11	3,3 (befriedigend -)
9,5 - 10	3,7 (ausreichend +)
7,5 - 9	4,0 (ausreichend)

Die Klausur ist **nicht bestanden**, falls insgesamt weniger als 7,5 Punkte oder bei den Aufgaben 3 bis 6 zusammen weniger als 3 Punkte erreicht wurden. In diesem Fall wird die Klausur mit **5,0 (nicht ausreichend)** benotet.