

# Erstklausur

Lineare Algebra II – FU Berlin

19.02.2026

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

## Hinweise:

- Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den “Schmierzetteln” und geben Sie nur die jeweils(!) unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen *oder* Ihrer Matrikelnummer.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind. Die Klausurzeit geht von 8:15 bis 9:45 (90 Minuten).
- Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist angegeben. Mit 50 erreichten Punkten ist die Klausur bestanden.
- Verwenden Sie **keine Abkürzungen!** Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.
- Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).
- Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

## Erklärung zur Notenbekanntgabe (bitte eine Auswahl ankreuzen):

- Ich wünsche eine **direkte Eintragung meiner Note** im Campusmanagement.
- Ich möchte meine **Note erst bei der Klausureinsicht** erfahren (gilt nur bei einem erlaubten Verbesserungsversuch am zweiten Klausurtermin).

Unterschrift: \_\_\_\_\_

## Erreichte Punkte (vom Dozenten auszufüllen):

<b>Aufgabe</b>	1	2	3	4	$\Sigma$
<b>max. Punkte</b>	30	20	30	20	100
<b>Punkte</b>					

Note: \_\_\_\_\_

## Aufgabenpaket 1: Jordan-Normalform (30 P.)

Gegeben die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  mit  $A = VJV^{-1}$ , wobei die Matrizen  $J, V \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  folgende Gestalt haben sollen:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Dabei sind  $v_i \in \mathbb{R}^5$  für  $i = 1, \dots, 5$  die Spalten der Matrix  $V$ . (kurz gesagt:  $J$  ist eine Jordan-Normalform von  $A$ )

- 1.1 Ohne Begründung: Wie lautet das charakteristische Polynom von  $A$ ?
- 1.2 Wie lautet das Minimalpolynom von  $A$ ? Begründen Sie!
- 1.3 Geben Sie Basisvektoren des Eigenraums zum Eigenwert  $-1$  von  $A$  an! Begründen Sie!
- 1.4 Geben Sie jeweils die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von  $A$  an! Begründen Sie!
- 1.5 Ohne Begründung: Geben Sie einen Hauptvektor erster Stufe von  $A$  an!
- 1.6 Berechnen Sie die Determinante von  $A$  (Hinweis: Zeigen Sie, dass  $A$  und  $J$  die gleiche Determinante haben)!
- 1.7 Stellt die Matrix  $A$  eine volumentreue lineare Abbildung dar? Begründen Sie!
- 1.8 Stellt die Matrix  $A$  eine orientierungserhaltende lineare Abbildung dar? Begründen Sie!
- 1.9 Kann  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  eine symmetrische Matrix sein? Begründen Sie!

## Aufgabenpaket 2: Bedeutung von Eigenwerten (20 P.)

- 2.1 Gegeben sei das Orthonormalsystem  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ , bezüglich des Standard-Skalarproduktes  $\langle x|y \rangle = x^\top y$ . Für die reellen Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  sei ferner die folgende Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben:

$$M = \lambda_1 v_1 v_1^\top + \lambda_2 v_2 v_2^\top + \lambda_3 v_3 v_3^\top.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix  $M$  jeweils den Eigenvektor  $v_i$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  besitzt!

- 2.2 Welche möglichst genauen Angaben kann man bezüglich des Defekts einer Matrix  $A$  machen, die den Eigenwert  $\lambda = 0$  mit algebraischer Vielfachheit  $m \geq 1$  besitzt? Begründen Sie!

## Aufgabenpaket 3: Gram-Schmidt-Verfahren (30 P.)

Gegeben seien die beiden Funktionen  $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = ix.$$

Berechnen Sie ausführlich eine Orthonormalbasis des Vektorraumes, der von diesen beiden Funktionen aufgespannt wird, bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx.$$

## Aufgabenpaket 4: Matrixexponential (20 P.)

Eine diagonalisierbare Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  habe nur die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 1$ .

- 4.1 Ohne Begründung: Wie lautet das Minimalpolynom von  $A$ ?
- 4.2 Zeigen Sie anhand des Minimalpolynoms, dass  $A^2 = A$  gilt! (Hinweis: Verwenden Sie bei der Begründung den Satz von Cayley-Hamilton)
- 4.3 Folgern Sie daraus, dass  $A^m = A$  gilt für  $m \geq 1$ !
- 4.4 Zeigen Sie, dass

$$\exp(A) = I + (e - 1)A$$

ist, wobei  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix sei!